Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Práctico 4

1. Hallar ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas:
   a) pasa por el punto $(1, 2, 5)$ y es paralela al vector $(2, 1, 3)$;
   b) pasa por los puntos $(4, 3, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

2. Sean $r: \ X = P + tu$ y $s: \ X = Q + tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas no paralelas, y sea R un punto del espacio. Probar
   a) r y s son coplanares si y solo si $(P - Q) \cdot (u \times v) = 0$.
   b) La distancia[1] del punto R a la recta r es $d(R, r) = \frac{\|(R-P)\times u\|}{\|u\|}$.
   c) La distancia entre r y s es $d(r, s) = \frac{\|(P-Q)\cdot(u\times v)\|}{\|u\times v\|}$.

3. Hallar la distancia del origen a la recta dada por $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3. \end{cases}$.

4. Se consideran las siguientes rectas
$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, \qquad r_2: \ \frac{x-1}{2} = 2 - y = z - 1, \qquad r_3: \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$
   Para cada par de rectas se pide: a) Investigar si son paralelas. b) Investigar si son coplanares. c) Hallar la distancia entre ellas.

5. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:
   a) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es paralelo a $u = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $v = \mathbf{i} - \mathbf{k}$.
   b) el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;
   c) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

6. a) Hallar la intersección de los siguientes planos: $2x - 3y + 4z = -2$, $\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = -1 - t + 2s \\ z = -2 - 2t - s \end{cases}$.
   b) Hallar la intersección del plano y la recta $\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = -1 - t + 2s \\ z = -2 - 2t - s \end{cases}$, $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

7. Para cada una de las ternas de planos que se proponen a continuación, hallar la intersección de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.
   a) $y + z = 0, \ 2x - y - 2z = 5, \ 3x + 3y + 2z = 7$.
   b) $x + 2y - z = 2, \ 2x + y - 3z = 0, \ -2x - 4y + 2z = 3$.
   c) $x - 2y + z = 5, \ x + z = 3, \ x + 4y + z = 0$.

8. Sean $\pi: \ ax + by + cz = d$ y $\pi': \ a'x + b'y + c'z = d'$ las ecuaciones de dos planos. Probar:
   a) π y π' son paralelos si y solo si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (suponiendo $a'b'c' \neq 0$).
   b) π y π' son ortogonales[2] si y solo si $aa' + bb' + cc' = 0$.

9. a) Sea P un punto y π el plano de ecuación $(X - Q) \cdot n = 0$. Probar que la distancia de P a π es $\frac{|(P-Q)\cdot n|}{\|n\|}$.
   b) Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $\pi: \ ax + by + cz = d$. Deducir que la a distancia de P a π es $\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

[1] La *distancia* entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ se define como el ínfimo de las distancias entre los puntos de los conjuntos.
[2] Dos planos se dicen *ortogonales* si sus vectores normales lo son.

10. Hallar la distancia de $(0, 0, 0)$ al plano $x - y = 3$, y de $(-2, -4, 3)$ al plano $2x - y + 2z + 3 = 0$.

11. Hallar una ecuación paramétrica para la recta que no corta a ninguno de los planos de ecuaciones $x + y + z = 1$, $x - y = 3$, y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$.

12. Verificar que los siguientes planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos:

    a) $x - 2y - 2z = 12$ y $x - 2y - 2z = 6$;

    b) $2x - 3y + 6z = 14$ y $4x - 6y + 12z = -21$.

13. En cada caso, hallar las ecuaciones de la recta que satisface las condiciones especificadas:

    a) Pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y + 3z - 1 = 0$.

    b) Pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, se intersecta con la recta $(x, y, z) = (1, -1, 3) + t(3, 2, -5)$ y es ortogonal a la recta $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

    c) Pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta

    $$(x, y, z) = (-1, -3, 2) + t(3, -2, -1).$$

14. En cada caso hallar la ecuación del plano que satisface las condiciones especificadas:

    a) Pasa por el punto $(2, -1, 1)$, es perpendicular al plano $2x + 3y - z + 5 = 0$ y es paralelo a la recta

    $$\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z. \end{cases}$$

    b) Pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x + 2y + z + 1 = 0$.

    c) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$, es paralelo al eje Oy y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje Ox (hay dos posibilidades).

15. Se consideran las rectas de ecuaciones $r_1 : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 + 4t \\ z = -2 + t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}.$

    a) Encontrar la perpendicular común a r_1 y r_2.

    b) Calcular la distancia entre r_1 y r_2, y hallar los puntos que la realizan.