Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Práctico 9

1. En los siguientes casos determinar si la función dada es una transformación lineal.

   a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(y-x,z+y)$.
   b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=\big(x^2,yz,x\big)$.
   c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x,y,x+1)$.
   d) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y,z)=x+2y+3z$.
   e) $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}$ definida por $T(p)=p(1)$.
   f) $T_w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T_w(v)=v+w$, siendo $w\in\mathbb{R}^2$ un vector no nulo fijo (traslación de vector w).
   g) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $T(v)=v\cdot w$ (producto escalar), siendo $w\in\mathbb{R}^3$ un vector arbitrario fijo.
   h) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(v)=P_w(v)$, siendo $P_w(v)$ la proyección ortogonal de v sobre $o\neq w\in\mathbb{R}^3$.

2. Si $A=(a_{ij})$ es una matriz cuadrada $n\times n$, se define su *traza* por $\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. Probar que $T:M_n\to\mathbb{R}$ definida por $T(A)=\operatorname{tr}(A)$ es una transformación lineal.

3. En cada uno de los casos siguientes, investigar si existe alguna transformación lineal T que verifique las condiciones dadas. En caso afirmativo hallar una tal T, y en caso negativo justificar la respuesta.

   a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0,0)=(2,1,0),\ T(1,1,0)=(0,0,1),\ T(1,1,1)=(0,0,1)$.
   b) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1)=(1,0),\ T(1+x)=(1,1),\ T(1+x+x^2)=(0,0),\ T(3+2x+x^2)=(2,1)$.
   c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, tal que $T(1,0,0)=(2,1,0),\ T(0,1,0)=(-1,2,3)$.
   d) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_1[x]$ tal que $T(1,0,1)=x+2,\ T(0,1,0)=2x+1,\ T(1,1,1)=5x+4$.

4. Recordar que si $A\in M_{m\times n}$, entonces $L_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es la multiplicación por A.

   a) Sea $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Hallar $L_A(x,y)$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Intrepretar geométricamente.
   b) Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(3x+2y-4z,x-5y+3z)$. Hallar $A\in M_{2\times 3}$ tal que $T=L_A$.

5. Sean las transformaciones lineales $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas por

   $$S(x,y,z)=(2x,y+z),\quad T(x,y)=(y,x).$$

   Se considera la composición $T\circ S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. Hallar $(T\circ S)(x,y,z)$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

6. Sea $R_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la rotación de centro el origen y ángulo $\theta\in\mathbb{R}$ arbitrario. Notar que R_θ es una transformación lineal.

   a) Hallar $A\in M_2$ tal que $R_\theta=L_A$.
   b) Hallar $R_\theta(x,y)$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   c) Deducir fórmulas para $\cos(2\theta)$ y $\operatorname{sen}(2\theta)$.

7. *a*) Se considera la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x+2y,y-z,x+2z)$.
      1) Verificar que el vector $(3,0,3)$ pertenece a $\operatorname{Im}(T)$.
      2) Verificar que el vector $(2,-1,-1)$ pertenece a $\operatorname{Ker}(T)$.

   b) Se considera la transformación lineal $T:M_2\to M_2$ definida por $T(M)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-2&2\end{smallmatrix}\right)M$.
      1) Verificar que $M=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ pertenece a $\operatorname{Ker}(T)$.
      2) Verificar que $M=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-2&0\end{smallmatrix}\right)$ pertenece a $\operatorname{Im}(T)$.

8. Hallar núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(p)=\big(p(1)+p(-1),\,p(0)\big)$,
   b) $T:M_2\to\mathbb{R}$ definida por $T(A)=\operatorname{tr}(A)$.
   c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es la proyección ortogonal sobre w, siendo $w\in\mathbb{R}^2$ un vector no nulo fijo.

9. Sea $T:M_n\to M_n$ definida por $T(A)=A+A^t$ (A^t es la traspuesta de A). Probar que el núcleo de T son las matrices antisimétricas y la imagen de T son las matrices simétricas.

10. Hallar una base del núcleo y una de la imagen para las siguientes transformaciones lineales:

a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x+2y+z,\ 2x+4y+2z,\ 0)$.

b) $T:\mathbb{R}_2[x]\to M_2$ es la transformación lineal tal que

$$T\left(x^2\right)=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\quad T(x)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix},\quad T(1)=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

11. Se consideran las funciones $T:\mathbb{R}^3\to M_2$ y $S:M_2\to\mathbb{R}_3[x]$ definidas por

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix}x-y&y\\y&y-z\end{pmatrix},\qquad S(A)=(1\ \ x)A\begin{pmatrix}x\\x^2\end{pmatrix}.$$

a) Probar que T y S son transformaciones lineales.

b) Hallar el núcleo y la imagen de T, S y $S\circ T$.

12. Sean $T=L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y $S=L_B:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Calcular la[1] nulidad y el rango de T, S, $S\circ T$ y $T\circ S$.

13. Sea $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$ y $T:M_2\to M_2$ definida por $T(X)=AX$. Calcular nulidad y rango de T.

14. En los ejercicios 6 a 13 determinar si las transformaciones lineales involucradas son inyectivas y/o sobreyectivas.

15. En los casos siguientes investigar si la transformación lineal T es un isomorfismo. En caso afirmativo, hallar la transformación lineal inversa T^{-1}.

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(6x+7y,\ 7x+4y)$.

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(2x+3y+z,\ 2x+2y+3z,\ x+y+z)$.

c) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definida por $T(x,y,z,t)=(x+y+2z,\ -x+z+3t,\ -y-z+4t,\ 5t)$.

d) $T:M_2\to\mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\right)=ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x+a+b+c+d$.

e) $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ definida por $T(p)=p+p'+p''$.

f) $T:M_n\to M_n$ definida por $T(A)=A^t$. *Sugerencia:* calcular $T\circ T$.

g) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es la rotación de centro en el origen y ángulo θ (ejercicio 6).

[1] La *nulidad* y el *rango* de una transformación lineal, son la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen, respectivamente.